PHƯƠNG TRÌNH CỘNG TÍNH CÔ-SI

Bùi Ngọc Diệp

Trường Trung học phổ thông Chuyên Lào Cai
(Bài dịch từ chương 9 "Additive Cauchy Equation" trong cuốn sách "Functional Equations" của Titu Andreescu và Iurie Boreico)

Bài toán 97. (AMM 2001) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y + f(y)) = 2y + f^2(x) \tag{0.1}$$

với mọi số thực x, y.
Lời giải. Nếu ta cố định x thì khi đó, vế phải (0.1) của phương trình là một hàm bậc nhất theo biến y nên nó là toàn ánh. Do đó f là một toàn ánh. Bởi vậy nếu ta có

$$y_1 + f(y_1) = y_2 + f(y_2)$$

từ giả thiết của bài toán với x và $y = \{y_1, y_2\}$ ta được

$$2y_1 = 2y_2,$$

điều nay suy ra $x + f(x)$ là toàn ánh. Do đó, tồn tại c thỏa mãn $f(c) = 0$. Điều này suy ra

$$f(c^2 + y + f(y)) = 2y.$$

Bây giờ, ta xét hai số cố định a, b. Thay $c = b + f(b) - a - f(a) > 0$ vào (0.1) nếu $x > a + f(a)$ khi đó tồn tại u thỏa mãn rằng

$$x = u^2 + a + f(a), \quad x + d = u^2 + b + f(b).$$

Khi đó

$$f(x) = 2a + f^2(x), \quad f(x + c) = 2b + f^2(x).$$

Do đó, ta kết luận rằng

$$f(x + c) - f(x) = 2(a - b)$$

với mọi x đủ lớn. Điều này có nghĩa rằng

$$f(x + c) = f(x) + d$$

với $d = 2(b - a)$ và

$$c + d = 3(b - a) + f(b) - f(a).$$

Chú ý rằng $f(x + nc) = f(x) + nd$ for với mọi x đủ lớn và mọi số tự nhiên n tùy ý. Nếu $d < 0$ thì $f(x + nc) < 0$ với mọi số tự nhiên n đủ lớn. Tuy nhiên, nếu $x + nc > f(0)$ thì $x + nc = u^2 + f(0)$ và sử dụng giả thiết với u và 0, ta được

$$f(x + nc) = f^2(u) > 0.$$

Điều này là mâu thuẫn. Vì vậy $d > 0$. Khi đó,

$$f(x + nc) + x + nc = f(x) + x + n(c + d).$$

Điều này suy ra rằng $f(x) + x$ lấy các giá trị lớn tùy ý. Bây giờ lấy một giá trị y nào đó. Khi đó, ta được

$$f((x + c)^2 + y + f(y)) = 2y + (f(x) + d)^2$$

for $x \geq x_0$. Giả sử rằng ta có $f(x+u) = f(x)$ với mọi x đủ lớn khi $u > 0$, ta có

$$f((x+u)^2 + y + f(y)) = f(x^2 + y + f(y)).$$

Tuy nhiên, ta có thể chọn x thỏa mãn rằng

$$2xu + u^2 = lc, l > 0$$

và khi đó chọn y thỏa mãn rằng $y + f(y)$ đủ lớn. Ta có

$$f((x+u)^2 + y + f(y)) = f(x^2 + 2xu + u^2 + y + f(y)) = f(x^2 + y + f(y)) + ld.$$

Điều này là mâu thuẫn. Ta xét $g(x) = x + f(x)$. Lấy một giá trị s cố định và $x \neq y$ với

$$g(x+s) - g(x) \leq g(y+s) - g(y).$$

Ta có

$$f(t + g(x+s) - g(x)) = f(t) + 2s, f(t + g(y+s) - g(y)) = f(t) + 2s$$

với mọi $t \leq t_0$ và nếu ta thay

$$z = t + g(x+s) - g(s)), v = (g(y+s) - g(y)) - (g(x+s) - g(x))$$

vào (0.1) thì $f(z+v) = f(z)$ với mọi $z \leq 0$. Vì $v \leq 0$ ta phải có $v = 0$ do ta đã chứng minh được rằng quan hệ này là không thể xảy ra với $v \neq 0$. Do đó

$$g(x+s) - g(x) = g(y+s) - g(y).$$

Vì x, y được chọn tùy ý, ta có thể kết luận rằng

$$g(x+s) - g(x)$$

không phụ thuộc vào x. Do đó

$$g(x+s) - g(x) = g(s) - g(0).$$

Vì vậy

$$g(x+s) + g(0) = g(x) + g(s).$$

Ta được

$$h(x) = g(x) - g(0)$$

là một hàm cộng tính, do đó $f(x) - g(0) = f(x) - f(0)$. Khi đó, ta có

$$f(x^2 + g(y)) = f(x^2) + f(g(y)) - f(0) = 2y + f^2(x).$$

Do đó

$$f(x^2) - f^2(x) = 2y - f(g(y)).$$

Nếu ta cố định y, ta được

$$f(x^2) = f^2(x) + e$$

với e cố định. Do đó $f(x) \leq -e$ với $x \leq 0$. Vì vậy $f(x) - f(0)$ là cộng tính và chặn dưới, khi đó sử dụng bài toán đã biết ta được $f(x) - f(0) = rx$ với mỗi r. Do đó $f = rx + s$ là tuyến tính. Giả thiết

$$f(x^2) - f^2(x) = 2y - f(g(y))$$

suy ra rằng

$$rx^2 + s - (rx+s)^2 = 2y - r((r+1)y + s) - s$$

or

$$r(1-r)x^2 - 2rsx - s^2 = (2 - r(r+1))y - (r+1)s,$$

điều này chỉ có thể xảy ra nếu

$$r(1-r) = 2rs = 2 - r(r+1) = 0.$$

Do đó $r = 0$ hoặc $r = 1$. Nếu $r = 0$ thì $2 - r(r+1) \neq 0$. Vì vậy $r = 1$ và ta được $s = 0$. Điều này chỉ ra rằng f là một ánh xạ đồng nhất. Thử lại, ta thấy rằng hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.
Bài toán 98. Tìm tất cả các hàm số $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn rằng

$$f(x+y) = f(x)g(y) + h(y) \tag{0.2}$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.
Lời giải. Thay $y = 0$, ta được

$$f(x) = f(x)g(0) + h(0),$$

vì vậy

$$f(x)(1 - g(0)) = h(0),$$

hoặc

$$1 - g(0) = 0,$$

hoặc

$$f(x) = \frac{h(0)}{g(0)}.$$

Trong trường hợp thứ hai f là hằng số. Khi đó, nếu chúng ta thay $f(x) = c$ vào (0.2) ta được $c = cg(y) + h(y)$ với mọi hàm số g, h tùy ý với $h(x) = c - cg(x)$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vì vậy giả sử rằng f không phải là hàm hằng. Khi đó $g(0) = 1$ và $h(0) = 0$. Thay $x = 0$ vào (0.2) ta được

$$f(y) = f(0)g(y) + h(y).$$

Đặt $f(0) = c$ khi đó $f(x) = cg(x) + h(x)$. Thay giá trị này vào (0.2), ta có

$$cg(x+y) + h(x+y) = cg(x)g(y) + h(x)g(y) + h(y).$$

Từ tính đối xứng vế bên phải của đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned} cg(x+y) + h(x+y) &= cg(x)g(y) + h(x)g(y) + h(y) \\ &= cg(x)g(y) + h(y)g(x) + h(x). \end{aligned}$$

Do đó,

$$h(x)g(y) + h(y) = h(y)g(x) + h(x).$$

Vì vậy

$$h(x)(g(y) - 1) = h(y)(g(x) - 1).$$

Chúng ta xét các trường hợp dưới đây
a) $g(x) = 1$ với mọi x. The khi đó đẳng thức (0.2) trở thành

$$h(x+y) = h(x) + h(y).$$

Điều này suy ra rằng h là hàm số cộng tính. Do đó

$$f = h + c, g = 1.$$

Ta thấy rằng những hàm số này thỏa mãn điều kiện của bài toán.

b) $h(x) = 0$ với mọi x. Khi đó đẳng thức (0.2) trở thành

$$cg(x + y) = cg(x)g(y).$$

Điều này chứng tỏ rằng hoặc $c = 0$ vì vây $f = h = 0, g$ là hàm số tùy ý, đây là những hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán, hoặc $c \neq 0$ và g là một hàm nhân tính, $f = cg, h = 0$, những hàm số này cũng thỏa mãn giả thiết bài toán.

c) Ta thấy rằng tồn tại x_0, y_0 thỏa mãn rằng

$$g(x0) \neq 1, h(y0) \neq 0.$$

Nếu chúng ta thay $x = x_0, y = y_0$ vào (0.2) ta kết luận rằng

$$h(x0)(g(y0) - 1) \neq 0$$

so

$$h(x0), g(y0) - 1$$

là khác 0. Thay $y = y_0$ vào (0.2), ta có

$$h(x)(g(y0) - 1) = h(y0)(g(x) - 1),$$

do đó

$$h(x) = (g(x) - 1)h(y0)g(y0) - 1.$$

Nếu ta thay $\frac{h(y_0)}{g(y_0)-1} = d$ vào (0.2) khi đó

$$h(x) = dg(x) - d.$$

Do đó, điều kiện của ta trở thành

$$(c + d)g(x + y) - d = cg(x)g(y) + (dg(x) - d)g(y) + dg(y) - d = (c + d)g(x)g(y) - d.$$

Vì vậy hoặc $c + d = 0$ hoặc g là một hàm nhân tính. Trường hợp đầu tiên ta được $d = -c$, vì vậy

$$f = cg(x) - cg(x) + c = c, h(x) = -cg(x) + c.$$

Điều này là mẫu thuẫn. Trong trường hợp 2, ta được g là một hàm nhân tính và

$$h = dg - d, f = cg + h = (c + d)g - d.$$

Đây là những hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 99. Chứng minh rằng mọi hàm cộng tính f xác định trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn là hàm số bị chặn dưới (trên) trong một khoảng của $\mathbb{R}^+$, có dạng $f(x) = f(1)x$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Lời giải. Set $g(x) = f(x) - f(1)x$. Khi đó $g(x)$ là một hàm cộng tính với $g(1) = 0$. Theo phương pháp quy nạp toán học, ta có

$$g(nx) = ng(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$. Ta sẽ chứng tỏ rằng $g(n) = 0$. Với mọi $k, l \in \mathbb{N}$ ta có

$$\lg\left(\frac{k}{l}\right) = g\left(k\right) = 0,$$

tức là

$$g\left(\frac{k}{l}\right) = 0.$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng tồn tại hằng số c và d thỏa mãn rằng $f(x) > c$ và $f(1)x < d$ trong mỗi khoảng của $x \in \mathbb{R}^+$. Khi đó đẳng thức $g(x+r) = g(x)$ với $x \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{Q}^+$ chứng tỏ rằng $g(x) > c - d$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Do đó

$$g\left(x\right) = \frac{g\left(nx\right)}{n} > \frac{c-d}{n}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$, tức là $g(x) \leq 0$ với mọi $x > 0$. Điều này suy ra rằng hàm số $g(x)$ là tằng vì với $x > y > 0$ ta có

$$g(x) = g(x-y) + g(y) \leq g(y).$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}^+$, ta lấy $r, s \in \mathbb{Q}^+$ thỏa mãn rằng $r > x > s$. Khi đó

$$0 = g(r) \leq g(x) \leq g(s) = 0$$

điều này chứng tỏ rằng $g(x) = 0$. Chú ý rằng kết quả của bài toán 99 vẫn đúng nếu ta thay $\mathbb{R}^+$ bởi $\mathbb{R}$. Mọi hàm số liên tục tại một điểm hoặc giảm trong một khoảng của $\mathbb{R}^+(\mathbb{R})$ vẫn thỏa mãn giả thiết của bài toán. Nói một cách khác, tính cộng tính của hàm số là không bị chặn trong mọi khoảng của $\mathbb{R}(\mathbb{R}^+)$.
Problem 100. (Tuymaada 2003) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ thỏa mãn rằng

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right) + f\left(y+\frac{1}{y}\right) = f\left(x+\frac{1}{y}\right) + f\left(y+\frac{1}{x}\right) \tag{0.3}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$.
Lời giải. Chúng ta thấy rằng hàm tuyến tính thỏa mãn điều kiện bài toán, ta sẽ chứng minh rằng chỉ nghiệm hàm của bài toán chỉ duy nhất là hàm cộng tính. Thay y bởi $\frac{1}{y}$ trong (0.3), ta được

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right) + f\left(y+\frac{1}{y}\right) = f\left(x+\frac{1}{y}\right) + f\left(y+\frac{1}{x}\right) = f\left(x+y\right) + f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Xét $1 < y < C$ với $C > 1$ và lấy x đủ lớn. Đẳng thức trên được viết lại dưới dạng

$$f\left(x+y\right) - f\left(x+\frac{1}{y}\right) = f\left(y+\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Vì f là liên tục nên f nên f là liên tục đều trong $\left[\frac{1}{C}; 2C\right]$ do đó với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại một $a > 0$ thỏa mãn rằng

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

với mọi $x, y \in \left[\frac{1}{C}; 2C\right]$, $|x - y| < a$. Lấy $x > max\left\{C, \frac{1}{a}\right\}$ ta kết luận rằng

$$\left|f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)\right|, \left|f\left(x+\frac{1}{y}\right) - f\left(y\right)\right| < \epsilon$$

Điều này suy ra rằng

$$\left(f\left(\frac{1}{x}+y\right) - f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right) - \left(f\left(y\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)\right) < 2a$$

và chúng ta chứng minh được rằng

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x+y\right) - f\left(x+\frac{1}{y}\right) = f\left(y\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)$$

và sự hội tụ là đều trong mọi đoạn $[1;C]$ với y. Với mọi $b>0$ có thể được viết dưới dạng duy nhất $y-\dfrac{1}{y}$ in a với $y>1$. Đặt $g\left(b\right)=f\left(y\right)-f\left(\dfrac{1}{y}\right)$. Khi đó, ta được

$$g\left(b\right)=\lim_{x\to\infty}f\left(x+b\right)-f\left(x\right)$$

Rõ ràng ta thấy rằng $g(a+b)=g(a)+g(b)$ và vì g là liên tục, ta tìm được $g(x)=cx$. Bây giờ, ta giả sử rằng $c=0$. Khi đó, lấy $f(x)-cx$ thay thế f. Ta được

$$f\left(x\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)$$

và vì vậy

$$\lim_{x\to\infty}\big(f\left(x+a\right)-f\left(x\right)\big)=0$$

hội tụ đều $a\in[0;C]$. Lấy y cố định let $x\to\infty$. Điều kiện

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)+f\left(y+\frac{1}{y}\right)=f\left(x+\frac{1}{y}\right)+f\left(y+\frac{1}{x}\right)$$

được viết lại dưới dạng

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)-f\left(x+\frac{1}{y}\right)=f\left(y+\frac{1}{x}\right)-f\left(y+\frac{1}{y}\right)$$

Ta thấy rằng vế phải tiến đến 0 trong khi đến vế trái tiến đến $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-f\left(x\right)$. Do đó $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=f\left(x\right)$. Điều này để chứng tỏ rằng f là hằng số. Lấy $1\le a<b$. Ta xét

$$x_0=a,y_0=b,x_{i+1}=x_i+\frac{1}{x_i},y_{i+1}=y_i+\frac{1}{y_i}.$$

Vì $x+\dfrac{1}{x}$ là tăng với $x\ge1$ và

$$4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\ge x^2+2,$$

ta có $x_i<y_i$ và x_i,y_i nhỏ tùy ý. Chú ý rằng

$$\left|x+\frac{1}{x}-y-\frac{1}{y}\right|<|x-y|$$

với $x,y\ge1$. do đó $|x_i-y_i|\le|a-b|$. Vì vậy

$$\lim_{n\to\infty}\big(f\left(x_n\right)-f\left(y_n\right)\big)=0.$$

Nhưng $f(x_n)=f(a),f(y_n)=f(b)$. chúng ta có thể kết luận rằng $f(a)=f(b)$. Ta được điều phải chứng minh.
Bài toán 101. (Sankt-Petersburg) Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn rằng

$$f(f(x+y))=f(x)+f(y).\tag{0.4}$$

Lời giải. Ta quan sát thấy rằng nếu f thỏa mãn phương trình thì khi đó $f+c$ cũng thỏa mãn phương trình với c là hằng số thực. Do đó ta có thể giả sử rằng $f(0)=0$. Thay $x=$ trong (0.4), ta được

$$f(f(x))=f(x).$$

Do đó f là một hàm số đồng nhất trong $Im(f)$. Chúng ta sẽ cố gắng chứng minh tằng f là hàm số đồng nhất hoặc $f=0$. Ta thấy rằng, điều này được chứng minh nếu ta chứng minh được rằng $Im(f)=\mathbb{R}$ hoặc $Im(f)=0$. Vì f là một hàm liên tục, ta thấy rằng $f(t)\neq 0$ khi đó $Im(f)$ chứa ảnh của $[0;t]$ dưới tác động f, nó là một khoảng có chứa 0. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $f(t)>0$. Xét A là tập hợp của tất cả a thỏa mãn tằng $[0;a]$ trở thành Imf. Đặt $b=supA$. Nếu $b<\infty$ khi đó ta có thể tìm $c=f(x)$ thỏa mãn rằng $c>\frac{b}{2}$. Khi đó, ta có

$$f(f(2x))=2c>b.$$

từ tính liên tục của f ta kết luận rằng $[0;2c]$ điều này là mâu thuẫn với giá trị lớn nhất của b. Do đó $b=\infty$ và $\mathbb{R}^+$ trở thành Imf. Chú ý rằng

$$0=f(f(0))=f(f(x-x))=f(x)+f(-x)$$

vì vậy $f(-x)=-f(x)$. Do đó f là một hàm hằng hoặc một hàm số có dạng $f(x)=x+c$. Phương trình tổng quát của phương trình này sẽ được xét ở phần kế tiếp.
Bài toán 102. Tìm tất các cặp hàm số liên tục $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn rằng

$$f(x)+f(y)=g(x+y)$$

Lời giải. Ta thấy rằng

$$f(x+y)+f(0)=f(x)+f(y)=g(x+y),$$

do đó là một hàm cộng tính. Vì vậy

$$f(x)=x+c$$

với mọi hằng số c và do đó

$$g(x)=x+2c.$$

Bài toán 103. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn rằng

$$f(m^2+f(n))=f(m)^2+n. \tag{0.5}$$

Lời giải. Ta thấy rằng f là đơn ánh vì nếu

$$f(n_1)=f(n_2)$$

thay $n=\{n_1,n_2\}$ vào (0.5) ta được

$$n_1=n_2.$$

Sử dụng điều kiện của giả thiết và tính đơn ánh của f ta được

$$f(m_1)^2+n_1=f(m_2)^2+n_2$$

nếu và chỉ nếu

$$m_1^2+f(n_1)=m_2^2+f(n_2).$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$n_1n_2=f(m_2)^2-f(m_1)^2$$

nếu và chỉ nếu

$$f(n_1)-f(n_2)=m_2^2-m_1^2.$$

Nếu $x - y \in S$ trong đó

$$S = \left\{a^2 - b^2 \,|a,\, b \in \mathbb{N}\right\}$$

khi đó $f(x) - f(y)$ chỉ phụ thuộc vào $x - y$. Vì vậy ta có thể viết

$$f(x) - f(y) = g(x - y).$$

Nhưng S chưa các số nguyên, không là 2 mod 4 hoặc ± 1 hoặc ± 4 (trong hai trường hợp sau điều này bắt buộc a hoặc b bằng 0). Nếu $x - y = 1$ khi đó

$$f(x) - f(y) = f(x) - f(x-1) = f(x) - f(x+7) + f(x+7) - f(x-1) = g(-7) + g(8).$$

Nếu ta thay $g(-7) + g(8) = a$ vào (0.5) khi đó $f(x) - f(x-1) = a$ so

$$f(x) = ax + b.$$

Từ đây, ta suy ra

$$a(m^2 + an + b) + b = (am + b)^2 + n$$

hoặc

$$am^2 + a^2 n + a(b+1) = a^2 m^2 + 2abm + n + b^2$$

và so sánh sự tương ứng giữa các hệ số, ta được $a^2 = a$ vì vậy $a = 1$ (a không thể bằng 0 vì hàm số này là hàm hằng, điều này là dễ thấy). Do đó $2ab = 0$, ta được $b = 0$. Vậy, $f(x) = x$ và nó thỏa mãn điều kiện bài toán.
Bài toán 104. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn rằng

$$f(f(x) + yz) = x + f(y)f(z). \tag{0.6}$$

Lời giải. f là một đơn ánh vì nếu thay $x = \{x_1, x_2\}$ vào (0.6) với $f(x_1) = f(x_2)$ ta sẽ được $x_1 = x_2$. f cũng là một toàn ánh vì nếu chúng ta cố định y, z ở vế phải của (0.6) thì khi đó vế phải là một hàm số bậc nhất theo biến y nên là 1 toàn ánh. Điều này dẫn đến f là môt toàn ánh. Lấy z_1 với $f(z_1) = 1$ and thay $x = x_1, z = x_1$ vào (0.6), ta được

$$f(f(x) + yz_1) = f(y)$$

tính đơn ánh của hàm số f đủ suy ra rằng

$$f(0) + yz_1 = y$$

với mọi y, điều này chỉ có thể xảy ra nếu $f(0) = 0, z_1 = 1$. Vì vậy $f(0) = 0, f(1) = 1$. Tiếp theo thay $y = 0$ vào (0.6) ta được

$$f(f(x)) = x.$$

Thay $z = 1, x = f(u), y = v$ vào (0.6) ta được

$$f(u + v) = f(u) + f(v).$$

Do đó f cộng tính. Thay $x = 0$ vào (0.6), ta đươc

$$f(yz) = f(y)f(z)$$

vì vậy

$$f(y^2) = f(y)^2,$$

do đó f là dương trên $\mathbb{R}$. Vì f is additive,f là hàm tăng. Vì vậy $f(x) = cx$ và do $f(1) = 1$ ta kết luận rằng f là một hàm số đồng nhất.
Bài toán 105. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)^2 + y) = x^2 + f(y). \tag{0.7}$$

Lời giải. Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ khi đó thay $x = x_1, x_2$ ta được $x_1^2 = x_2^2$ vì vậy $x_2 = \pm x_1$. Xét hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ được xác định bởi

$$h(x) = f^2(\sqrt{x}).$$

Ta có thể viết điều kiện đề bài cho dưới dạng

$$f(h(x) + y) = x + f(y)$$

for $x > 0$. Khi đó

$$f(h(u) + h(v) + y) = u + f(h(v) + y) = u + v + f(y) = f(h(u + v) + y).$$

Vì vậy,

$$h(u) + h(v) + y = \pm(h(u + v) + y).$$

Trường hợp $h(u) + h(v) + y = -(h(u + v) + y)$ là không đúng với mọi y, vì vậy với mỗi y, ta có

$$h(u) + h(v) + y = h(u + v) + y.$$

Do đó h là cộng tính. Vì h là không âm theo định nghĩa, $h(x) = cx$ where $c \geq 0$. Do đó ta có thể kết luận rằng

$$f(x) = \pm\sqrt{c}x.$$

Khi đó

$$f(cx^2 + y) = x^2 + f(y).$$

Nếu $f(y) = -\sqrt{c}y, y \neq 0$ thì

$$f(cx^2 + y) = x^2 - \sqrt{c}y$$

vì vậy

$$f^2(cx^2 + y) = (x^2 - \sqrt{c}y)^2 \neq (cx^2 + y)2$$

với mỗi x, vì

$$(x^2 - \sqrt{c}y)^2 = (cx^2 + y)^2$$

là tương đương với

$$(c^1 - 1)x^4 + 2(c + \sqrt{c})yx + (1 - c^2)y^2 = 0.$$

Từ đây, ta được $f(y) = \sqrt{y}$. Trong trường hợp này, ta có

$$(x^2 + \sqrt{c}y)^2 = (cx^2 + y)^2.$$

Với $x = 0$ đẳng thức trên trở thành $cy^2 = y^2$ vì vậy $c = 1$. Vậy $f(x) = x$ với mọi x. Hàm số này thỏa mãn điều kiện của bài toán.
Bài toán 106 (Tổng quát bài toán 92). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn rằng

$$f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y \tag{0.8}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$.
Lời giải. Bài toán này chỉ khác bài toán 92 ở giả thiết $\mathbb{R}$ được thay thế bởi $\mathbb{R}^+$ nhưng điều này làm tăng độ khó của bài toán. Ví dụ ta không thể sử dụng giá trị $f(0)$ (như chúng ta đã làm với bài toán 92) để

tính các giá trị của f tại những số dương. Đó là lí do tại sao, đầu tiên ta sẽ quy về phương trình cộng tính Cauchy Thay $f(1) = a$ vào (0.8), ta được

$$f(f(y) + a) = a^2 + y \tag{0.9}$$

và

$$f(xf(x) + a) = f^2(x) + 1. \tag{0.10}$$

nó suy ra từ (0.9) rằng

$$f(y) + a + a^2 = f(f(f(y) + a) + a) = f(y + a + a^2).$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học theo n, ta được

$$f(y + n(a + a^2)) = f(y) + n(a + a^2) \tag{0.11}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Mặt khác, (0.9) và (0.10) suy ra rằng

$$xf(x) + a + a^2 = f(f(xf(x) + a) + a) = f(f^2(x) + 1 + a).$$

Kết hợp điều này với (0.8), ta được

$$\begin{aligned} f(f(f^2(x) + 1 + a) + f(y)) &= f(xf(x) + a + a^2 + f(y)) \\ &= f^2(x) + y + a + a^2. \end{aligned} \tag{0.12}$$

Từ (0.9) ta suy ra rằng hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn hơn a^2 và do đó hàm số $f^2(x) + 1 + a$ đạt giá trị tùy ý lớn hơn $a^n + a + 1$. Do đó, ta được

$$f(f(x) + f(y)) = x + y + a^2 - 1 \tag{0.13}$$

với mọi $x > a^4 + a + 1, y > 0$. Từ (0.11), ta suy ra rằng (0.13) là đúng với mọi $x, y > 0$. Lấy x, y tùy ý và chọn $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn rằng

$$x + n(a + a^2) > a^4 + a + 1.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} f(f(x) + f(y)) &= f(f(x + n(a + a^2)) + f(y)) - n(a + a^2) \\ &= x + n(a + a^2) + y + a^2 - 1 - n(a + a^2) \\ &= x + y + a^2 - 1. \end{aligned}$$

Thay x và y tương ứng với $f(x)$ và $f(y)$ trong (0.13) ta được

$$f(x + y + 2a^2) = f(x) + f(y) + a^2 - 1. \tag{0.14}$$

Do đó

$$f(x + 2a^2) + f(y - 2a^2) = f(x + y + 2a^2) + 1 - a - a^2 = f(x) + f(y).$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$f(x + 2a^2) - f(x) = b$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$, trong đó b là một hằng số. Thay $g(x) = f(x) + c$ where $c = a^2 + a - 1 - b$. Then (0.14) có thể được viết dưới dạng

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$. Từ $f(x) > 0$ ta thấy rằng $g(x) > c$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Từ kết quả bài toán 99, ta được $g(x) = g(1)x$, điều này suy ra rằng $f(x) = g(1).x - c$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Ta thấy rằng những hàm số này thỏa mãn điều kiện bài toán nếu và chỉ nếu $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.
Bài 107. (Bulgaria '2004) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho:

$$(f(x) - f(y))f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = f(x) + f(y). \tag{0.15}$$

với mọi $x \neq y$.
Lời giải. Theo (0.15) ta thấy $x \neq y$ và $f(x) = f(y)$ thì $f(x) = f(y) = 0$. Bây giờ, giả sử $f(a) = 0$ với mỗi $a \neq 0$. Khi đó hoặc $f(x) = 0$ hoặc $f\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = 1$. Vậy, nếu $f(x) \neq 0$ với mỗi x, thì

$$f\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = f\left(\frac{1+a}{1-a}\right) = 1.$$

Từ chứng minh trên ta thấy rằng

$$\frac{x+a}{x-a} = \frac{1+a}{1-a}$$

tức là $x = 1$. Vì vậy, $f(x) = 0$ với $x \neq 1$.

Từ (0.15) cho thấy $f(1) = 0$. Vì vậy, hoặc $f \equiv 0$ hoặc $f(x) \neq 0$ với $x \neq 0$. Rõ ràng, hàm số $f(x) \equiv 0$ hiển nhiên là thỏa mãn (0.15).

Bây giờ, xét $f(x) \neq 0$ với $x \neq 0$ khi đó f là một đơn ánh. Với $y = 0$ ta có

$$f(x)(f(1) - 1) = f(0)(f(1) + 1).$$

Vì f không phải là hàm hằng nên $f(1) = 1$ và $f(0) = 0$. Thay y bởi xy trong (0.15), ta có:

$$f\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{f(x) - f(xy)}$$

Đặc biệt

$$f\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{f(1) + f(y)}{f(1) - f(y)}.$$

Từ đó $f(1) = 1$, điều này cho thấy

$$\frac{f(x) + f(xy)}{f(x) - f(xy)} = \frac{f(1) + f(y)}{f(1) - f(y)}$$

Dễ dàng thấy điều này tương đương với:

$$f(xy) = f(x)f(y),$$

trong đó f là một hàm nhân tính. Khi đó $f(x^2) = f^2(x) = f^2(-x)$ và từ tính đơn ánh của f cho thấy $f(x) = -f(-x) > 0$ với $x > 0$. Từ (0.15) ta được $f(x) > f(y)$ với $x > y > 0$. Khi đó $lgf(e^x)$ là một hàm cộng tính tăng chặt và do đó $f(x) = x^\alpha$với $x > 0$. Thay hàm số này vào (0.15) ta được $\alpha = 1$, nghĩa là $f(x) = x$ với mọi x.
Bài toán 108 (Ấn Độ 2003) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho:

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy) \tag{0.16}$$

với mọi x, y.

Lời giải. Sử dụng (0.16), với mọi z thuộc $\mathbb{R}$ ta được

$$f(x+y+z) = f(x) + f(y+z) + f(xy+xz) - f(x)f(y+z) =$$

$$f(x) + (1-f(x))(f(y)+f(z)+f(yz)-f(y)f(z))$$
$$+f(xy) + f(xz) + f(x2yz) - f(xy)f(xz) =$$
$$f(x)+f(y)+f(z)+f(xy)+f(yz)+f(zx)+f(x)f(y)f(z)$$
$$-f(x)f(y)-f(y)f(z)-f(z)f(x)$$
$$+f(x2yz)-f(xy)f(xz)-f(x)f(yz).$$

Vì biểu thức ở dòng cuối là một dạng đối xứng của x, yz, nên điều này suy ra rằng

$$f(x^2yz) - f(xy)f(xz) - f(x)f(yz) = f(xy^2z) - f(xy)f(yz) - f(y)f(xz).$$

Với $y = 1$ ta được

$$f(x^2z) = (a-1)f(xz) + f(x)f(xz)$$

trong đó $a = 2 - f(1)$. Mặt khác, (0.16) chứng tỏ rằng

$$f(x^2z) = f(x+xz) + f(x)f(xz) - f(x) - f(xz).$$

Do đó

$$f(x+xz) = af(xz) + f(x).$$

Với $z = 0$ ta được $af(0) = 0$.

Nếu $a = 0$ thì $f(1+z) = f(1)$, nghĩa là $f \equiv 2$.

Với $f(0) = 0$. Khi đó

$$f(x) = -af(-x) = a^2 f(x)$$

và do đó hoặc $f \equiv 0$,hoặc $a^2 = 1$.

Nếu $a = -1$ thì $-3 = f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, a$. Điều này là mâu thuẫn.

Với $a = 1$. Đặt $z = \dfrac{y}{z}$ thì khi đó

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

với mọi $x \neq 0$ và với mọi y. Ta thấy rằng kết quả này cũng đúng với $x = 0$. Từ (0.16) , ta suy ra rằng

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Khi đó

$$f(x+y) = f(x) + (f(\sqrt{y}))2 \geq f(x)$$

với $y \geq 0$. Do đó f là một hàm cộng tính và tăng và do đó $f(x) = f(1)x = x$. Vì vậy, $f \equiv 2, f \equiv 0$ hoặc $f(x) \equiv x$. Rõ ràng các hàm số này thỏa mãn điều kiện bài toán.

BÀI TẬP

Bài toán 1. *(Bulgaria, 1994) Tìm tất cả các hàm số:*$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho:*

$$xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y)$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

Bài toán 2. *Tìm tất cả các hàm số:*$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)f(y)+1$$

Bài toán 3. *Tìm tất cả các hàm số:*$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho:*

$$f(f(m)+f(n))=m+n$$

với mọi $m,n\in\mathbb{N}$.

Bài toán 4. *Kí hiệu* T *là tập hợp các số thực lớn hơn 1. Cho* $n\in\mathbb{N}$,*tìm tất cả các hàm số:*$f:T\to\mathbb{R}$ *sao cho:*

$$f(x^{n+1}+y^{n+1})=x^nf(x)+y^nf(y)$$

với mọi $x,y\in T$.

Bài toán 5. *(Russia '1993). Tìm tất cả các hàm số:*$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *sao cho:*

$$f(x^y)=f(x)^{f(y)}$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}^+$.

Bài toán 6. *(Bài toán tổng quát của Bài 94) Tìm tất cả các hàm số:*$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *bị chặn trên một khoảng và thỏa mãn:*

$$f(xf(y))=yf(x)$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}^+$.

Bài toán 7. *(Bài toán tổng quát của Bài 95) Cho* S *là tập hợp tất cả các số thực lớn hơn -1. Tìm tất cả các hàm số:* $f:S\to S$ *bị chặn trên một khoảng và thỏa mãn:*

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$$

với mọi $x,y\in S$.

Bài toán 8. *(IMO '2002) Tìm tất cả các hàm số:*$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho:*

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t))=f(xy-zt)+f(xt+yz)$$

với mọi $x,y,z,t\in\mathbb{R}$.

Bài toán 9. *(Korea 1998) Tìm tất cả các hàm số:*$f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ *thỏa mãn:*

$$2f(m^2+n^2)=f(m)^2+f(n)^2$$

với mọi $m,n\in\mathbb{N}_0$.

Bài toán 10. *Tìm tất cả các hàm số:*$f:\mathbb{R}\to[0;+\infty)$ *thỏa mãn:*

$$f(x^2+y^2)=f(x^2-y^2)+f(2xy)$$

Bài toán 11. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho:*

$$f(y+zf(x))=f(y)+xf(z)$$

Bài toán 12. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho:*

$$f(xf(z)+y)=zf(x)+y$$

Bài toán 13. *Tìm tất cả các hàm số liên tục* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)+f(y_1,y_2,\dots,y_n)=f(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

Bài toán 14. *Cho số tự nhiên* $n\geq 2$, *tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sao cho:*

$$f(x^n+f(y))=f^n(x)+y$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

Bài toán 15. *Cho* $n\geq 3$ *là một số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm liên tục* $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ *mà*

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)=1$$

trong đó $x_1,x_2,\dots,x_n\in[0;1]$ *và* $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.